



TITLE:

# 3次元ミンコフスキー空間内の離散空間的平均曲率一定曲面 (部分多様体の幾何学の深化と展開)

AUTHOR(S):

安本, 真士

---

CITATION:

安本, 真士. 3次元ミンコフスキー空間内の離散空間的平均曲率一定曲面 (部分多様体の幾何学の深化と展開). 数理解析研究所講究録 2020, 2152: 1-15

ISSUE DATE:

2020-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/255071>

RIGHT:

# 3次元ミンコフスキー空間内の離散空間的 平均曲率一定曲面

大阪市立大学・数学研究所 安本真士 \*

Masashi Yasumoto

Advanced Mathematical Institute

Osaka City University

## Abstract

本稿は、可積分系のアプローチを用いた、3次元ユークリッド空間内の曲面の離散微分幾何の研究のサーベイと、3次元ミンコフスキー空間内の離散空間的平均曲率一定曲面の最近の研究の紹介である。両者は一見すると似ているが、顕著に異なる点も現れる。これらの比較を行いながら、曲面の離散微分幾何の研究の概略について述べる。

## 1 紹介

連続的な（以後「なめらかな」と表記）場合、3次元空間内の曲面は実に多様な側面を持っており、多様なアプローチを用いて研究がなされてきた。たとえば、3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の極小曲面は、微分幾何、変分問題、複素関数論、可積分系と深く関わりを持ち、実に様々な観点から研究がなされている。さらに、極小曲面は石鹸膜の数理モデルとしても知られており、諸分野とも関わりを持っていることから、多くの研究者の関心を惹きつけている。

我々の研究の紹介を行う前に、最近の曲面の離散化の動向について概要を述べる。最も「よい」曲面の離散化は、上記の性質をはじめとする種々の性質を全て兼ね備えた曲面の離散化であろう。一方で、離散的な場合にこれを実現するのは大変に難しく、上記の性質をいずれかに着目して離散曲面の理論が提唱されることが多い。

いくつかの先行研究を紹介する。Pinkall-Polthier [20] は、極小曲面の持つ面積最小性に着目して、3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の三角形分割された離散極小曲面の理論を提唱した。その後、この研究は Polthier-Rossman [21] によって、三角形分割された離散平均曲率一定曲面（離散 CMC 曲面）へと一般化された。これらの研究は、不安定な極小曲面の指数を、数値計算的に検証するために用いられており、どちらかというとなめらかな対象の近似という側面が強い<sup>1</sup>。このアプローチは、変分問題以外の研究とはあまり関わりを持っていない。

---

\*E-mail: yasumoto@sci.osaka-cu.ac.jp

<sup>1</sup>このような印象を著者は受けている。実際、これらの研究は、純粋数学者にも高く注目されているが、それよりも CG の研究者からさらに高い注目を集めている。

ほぼ同時期に、可積分系のアプローチを用いた  $\mathbb{R}^3$  内の離散双等温曲面の理論が提唱された。ここで考えられている離散曲面は、 $\mathbb{Z}^2$  からの写像のことである。なめらかな曲面に作用する可積分系変換が、離散曲面にも導入され<sup>2</sup>、離散的な対称性を保つ曲面の離散化が進められている。この方面の研究については、[5], [8], [11] を参照されたい。近年、より一般の離散曲面に対する可積分系変換が確立され、さらに広いクラスの研究がなされ始めている。詳細は、著者等による最近のプレプリント [6] を参照されたい。このアプローチは、微分幾何、可積分系、複素関数論と関わりを持っているが、変分問題とはあまり関わりを持っていない。

離散曲面の微分幾何的研究は、最近注目を集め始めているが、概略について日本語で気軽に読めるものが少ない<sup>3</sup>。本稿では、まずは  $\mathbb{R}^3$  内の離散双等温曲面の研究について説明し、3次元ミンコフスキー空間  $\mathbb{R}^{2,1}$  内の離散空間的 CMC 曲面の最近の進展について概略を述べる。離散曲面の微分幾何の研究についてより詳しい解説文を、Rossman 氏と共同で執筆中なので、より興味を持たれた方はそちらも参照いただきたい ([24])。なお、本稿では紹介しないが、前述の2つのアプローチの共通部分を見出した研究 [17] や、異なるアプローチに基づく離散曲面論が、[16] において導出されていることをここに付記しておきたい。

## 2 $\mathbb{R}^3$ 内の離散曲面論

$f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow M$  ( $M = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{2,1}$  とする。 $\mathbb{R}^{2,1}$  の定義は後述) を考える。本来、 $f$  の像全体は  $M^3$  内の点の集合となるが、離散曲面を可視化するために2点  $f(m, n)$ ,  $f(m+1, n)$  および2点  $f(m, n)$ ,  $f(m, n+1)$  ( $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ ) を辺で結ぶことにより離散曲面を可視化することにする。本稿では、 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  に対し、 $f$  の像を

$$\begin{aligned} f(m, n) &= f_{m,n} = f_i, & f(m+1, n) &= f_{m+1,n} = f_j, \\ f(m+1, n+1) &= f_{m+1,n+1} = f_k, & f(m, n+1) &= f_{m,n+1} = f_\ell \end{aligned}$$

と略記し、 $(f_i, f_j, f_k, f_\ell)$  を4点  $f_i, f_j, f_k, f_\ell$  を頂点に持つ四角形とする。以後、4点  $f_i, f_j, f_k, f_\ell$  は同一平面上にあると仮定する。まずは離散曲面  $f$  のガウス写像を定義する。

**Definition 2.1.**  $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を離散曲面とし、

$$d_{ij}\nu = -\kappa_{ij} \cdot d_{ij}f, \quad d_{i\ell}\nu = -\kappa_{i\ell} \cdot d_{i\ell}f \quad (\kappa_{ij}, \kappa_{i\ell} \in \mathbb{R})$$

をみたす離散曲面  $\nu: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  のことを  $f$  のガウス写像といい、 $\kappa_{ij}, \kappa_{i\ell}$  のことを  $f$  の主曲率という。ここで、 $d_{i*}f := f_* - f_i$ ,  $d_{i*}\nu := \nu_* - \nu_i$  ( $*$  =  $j, \ell$ ) と定める。

この定義は実に自然なものである。実際、なめらかな場合、次が成り立つ。

**Proposition 2.1.**  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を曲率線座標  $(u, v)$  によってパラメータ表示された曲面とし、 $\nu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  を  $f$  の単位法ベクトル場とする。 $f$  の主曲率を  $\kappa_1, \kappa_2$  とすると、

$$\nu_u = -\kappa_1 f_u, \quad \nu_v = -\kappa_2 f_v$$

が成り立つ。ここで、 $f_u := \frac{\partial}{\partial u}f$ ,  $f_v := \frac{\partial}{\partial v}f$  と定める。

<sup>2</sup>誤解を招く可能性があるので注意しておく、なめらかな場合の可積分系変換をそのまま離散曲面に適用するのではなく、なめらかな場合と整合性が取れるような、離散曲面に対する可積分系変換を新たに導入しなければならない。このような作業を、理論を「離散化する」と我々は呼んでいる。

<sup>3</sup>特に、大学院生等の若手がこの研究分野を勉強する際の一つの障害となっているように感じている。

なめらかな場合、臍点を除くと、必ず曲率線座標に取り替えることが出来ることが知られている ([25] 参照). 離散曲面の主曲率はこの性質に基づいて定義がなされている.

可積分系に基づく,  $\mathbb{R}^3$  内の離散曲面の研究は, 主に, vertex offset mesh, edge offset mesh, face offset mesh の3種類の研究がなされている. もとものの [2] では, vertex offset mesh (2つの四角形の, 対応する頂点間の距離が一定となるような離散曲面) が考えられた. 本稿では, vertex offset mesh かつ特別な条件を満たす離散曲面について概略を述べる. edge offset mesh, face offset mesh の最近の研究については, [5] を参照いただきたいが, 本質的に考えられているのは, Figure 1 にあるような3つのパターンであり, いずれの場合でも, 円と関わりを持つ場合が主に研究されている.

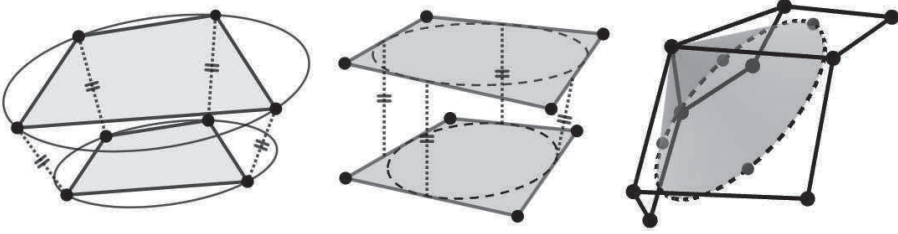


Figure 1: 左から順に, vertex offset mesh, edge offset mesh, face offset mesh の特別な例. ここで記載している vertex offset mesh は, 四角形の4点が同一円周上にあり, edge offset mesh の場合は, 四角形に内接する円が存在する. また, face offset mesh は, 1つの頂点を共有する4つの四角形に接する円錐が存在する.

$\nu$  の像域を  $\mathbb{S}^2$  に制限すると, 各  $(\nu_i, \nu_j, \nu_k, \nu_\ell)$  は自動的に同一円周上にあることが分かる. このことから, 対応する  $(f_i, f_j, f_k, f_\ell)$  も同一円周上にあることが分かる (Figure 2 参照). このような離散曲面 (vertex offset mesh) に着目していくが, これは自然な離散化なのであるうか? 実はなめらかな場合, 次が知られている ([9] 参照).

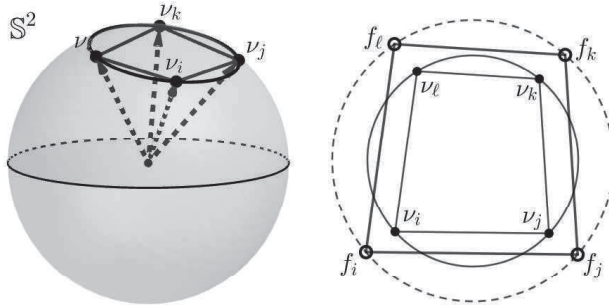


Figure 2:  $\nu$  の像域が  $\mathbb{S}^2$  である場合の様子. 一般に, ある四角形が同一円周上にあると仮定すると, その四角形の各辺と平行な辺を持つ四角形はまた同一円周上にある.

**Proposition 2.2.**  $F : D(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3 \cong \text{Im}\mathbf{H}$  を曲率線座標  $(u, v)$  によってパラメータ表示される曲面とする. このとき,

$$cr(F, F_1, F_{12}, F_2) := (F - F_1) \cdot (F_1 - F_{12})^{-1} \cdot (F_{12} - F_2) \cdot (F_2 - F)^{-1}$$

とおくと,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} cr(F, F_1, F_{12}, F_2) \in \mathbb{R}$  かつ  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} cr(F, F_1, F_{12}, F_2) < 0$  となる. ここで,

$$\mathbf{H} := \{a_1 + a_2\mathbf{i} + a_3\mathbf{j} + a_4\mathbf{k} \mid a_i \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}\}$$

は Hamilton の四元数体とし,

$$F = F(u, v), F_1 = F(u + \epsilon, v), F_{12} = F(u + \epsilon, v + \epsilon), F_2 = F(u, v + \epsilon)$$

とおいている. また  $\mathbb{R}^3$  の各要素は,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \cong & \text{Im}\mathbf{H} \\ \cup & & \cup \\ (x_1, x_2, x_3) & \cong & x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \end{array}$$

という同一視のもとで  $\text{Im}\mathbf{H} := \{a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$  の要素とみなして,  $cr(F, F_1, F_{12}, F_2)$  を定義している.  $cr(F, F_1, F_{12}, F_2)$  を, 4 点  $F, F_1, F_{12}, F_2$  の複比という<sup>4</sup>.

つまり, 曲率線座標によってパラメータ表示された曲面の無限小四角形の複比は実数かつ負の値をとるものとみなすことができる. Definition 2.1 と Proposition 2.1 を鑑みると, 我々が着目している vertex offset mesh は, 曲率線座標によってパラメータ表示された曲面の離散化とみなすことができる. 曲率線座標を持つ曲面の離散化の特別なケースとして, 双等温曲面の離散化を次章で紹介する.

**Remark.** なめらかな場合と異なり, 一般に与えられた離散曲面  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  のガウス写像  $\nu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  は唯一つに定まらない. これはガウス写像の初期条件の選び方に 2 次元の自由度が生じることに起因する. 一方, 後述の通り, 離散極小曲面や離散 CMC 曲面に対しては“良い” ガウス写像を本質的に唯一つ選ぶことが出来る.

4 つの頂点が同一平面上にある  $\mathbb{R}^3$  内の四角形  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  を 1 つ与えたとき,

$$\text{Quad}^{\parallel}(X) := \left\{ P = (p_1, p_2, p_3, p_4) : \text{四角形} \left| \begin{array}{l} x_{i+1} - x_i \parallel p_{i+1} - p_i \\ (i = 1, 2, 3, 4) \end{array} \right. \right\}$$

と定める. ただし  $x_5 = x_1$ ,  $p_5 = p_1$  とする.  $P, Q \in \text{Quad}^{\parallel}(X)$ ,  $k \in \mathbb{R}$  に対し,

$$P + Q := (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3, p_4 + q_4), kP := (kp_1, kp_2, kp_3, kp_4)$$

と定めることにより  $\text{Quad}^{\parallel}(X)$  はベクトル空間となる. このとき, 次を定義する.

<sup>4</sup>特に複比が実数のときは, 複比は Möbius 変換のもとで不変である.

**Definition 2.2.**  $P := (p_1, p_2, p_3, p_4)$ ,  $Q := (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \text{Quad}^{\parallel}(X)$  に対し,  $P, Q$  が互いに双対である (もしくは  $Q$  は  $P$  の双対四角形である) とは,

$$p_1 - p_3 \parallel q_2 - q_4, \quad p_2 - p_4 \parallel q_1 - q_3$$

をみたすことをいう.  $P$  の双対四角形  $Q \in \text{Quad}^{\parallel}(X)$  は存在し, 相似変換, 平行移動を除いて一意に定まる.

$P$  の双対四角形の存在性は初等的に証明することが出来る. ここでは詳細を紹介しないが, Figure 3 のような3つのいずれの場合にも,  $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  の双対四角形  $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$  が実際に存在していることを確認いただきたい. 詳細は [4], [5] 参照.

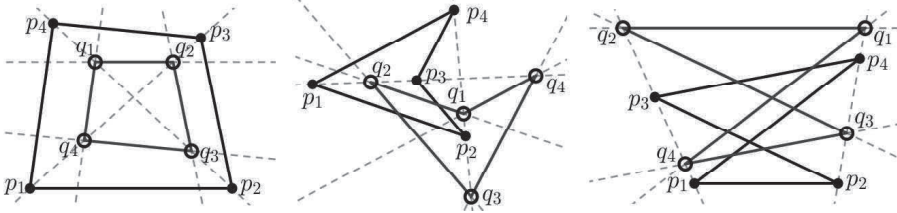


Figure 3: 与えられた四角形  $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  と,  $P$  の双対四角形  $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ .  $P$  が凸でない四角形の場合でも同様に構成することが出来る.

双対四角形を用いることにより離散曲面のガウス曲率及び平均曲率を定義することが出来るようになるが, 現時点で直接の関係は見当たらない. 離散化に適した性質を見つけたいので, 一旦なめらかな場合に話を戻そう.  $F : D(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $(x, y)$  によってパラメータ表示された曲面,  $\hat{\nu} : D \rightarrow \mathbb{S}^2$  を  $F$  のガウス写像とする.  $F$  の距離  $t$  の平行曲面  $F^t := F + t\hat{\nu}$  に対して,  $F(D)$  の面積,  $F^t(D)$  の面積をそれぞれ  $A(F)$ ,  $A(F^t)$  とおくと, 簡単な計算から,

$$A(F^t) \left( = \int_D \det(F_x^t, F_y^t, \hat{\nu}) dx dy \right) = \int_D (1 - 2tH + t^2K) \det(F_x, F_y, \hat{\nu}) dx dy \quad (1)$$

となる, ここで,  $K, H$  はそれぞれ  $F$  のガウス曲率, 平均曲率である. Equation(1) は,  $D$  を十分小さく取った時の微小面積について,

$$A(F^t) = (1 - 2tH + t^2K)A(F) \quad (2)$$

が成り立つということを意味する. Equation (2) は, Steiner 公式と呼ばれている. この性質は離散化と相性が良さそうに思えるので, 微小四角形を離散曲面に取り替えて, Equation (2) を離散曲面と平行曲面との間に成り立つ等式とみなして, 離散曲面のガウス曲率, 平均曲率を定義したい (Figure 4 参照).

Steiner 公式に基づいて離散曲面のガウス曲率, 平均曲率を定義するために, もう少し準備を行う. 四角形  $X = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  の (向き付けられた) 面積を  $A(P)$  と表すと,

$$A(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \det(p_{i+1} - p_1, p_{i+2} - p_1, N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \det(p_i, p_{i+1}, N)$$

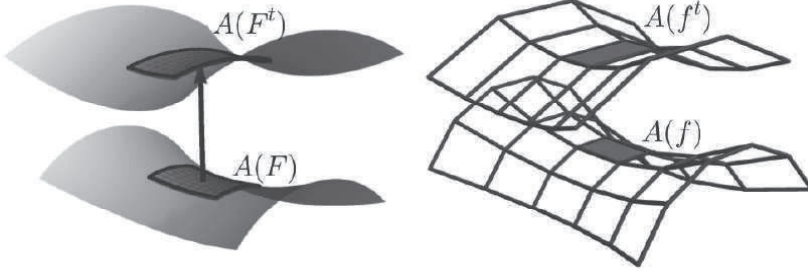


Figure 4: もとの曲面の微小面積と平行曲面の微小面積との関係. この2つの四角形をそれぞれ四角形  $(f, f_1, f_{12}, f_2)$ ,  $(f^t, f_1^t, f_{12}^t, f_2^t)$  に置き換え, Equation(2) が離散曲面とその平行曲面との間に成り立つ等式とみなす.

となる. ここで,  $N$  は  $X$  に直交する単位法線ベクトルとする.  $P, Q \in \text{Quad}^{\parallel}(X)$  に対し,

$$A(P, Q) := \frac{1}{2} \{A(P + Q) - A(P) - A(Q)\}$$

のことを,  $P, Q$  の混合面積という.

**Remark.**  $A(P, Q)$  を明示的に書き下すと,

$$A(P, Q) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \{\det(p_i, q_{i+1}, N) + \det(q_i, p_{i+1}, N)\}$$

となる. また, 混合面積は, 一般の  $n$  角形についても定義できる. 本稿では, 四角形のみを取り扱うので, これで充分である.

混合面積は, 次の性質を満たす. 特に, 3つ目の性質は, 双対四角形を特徴付ける重要な性質である. 証明は [4], [11] 参照.

- $A(P, P) = A(P)$ ,  $A(P, Q) = A(Q, P)$  ( $P, Q \in \text{Quad}^{\parallel}(P)$ )
- $A(P + tQ) = A(P) + 2tA(P, Q) + t^2A(Q)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ,  $P, Q \in \text{Quad}^{\parallel}(P)$ )
- $Q$  が  $P$  の双対四角形  $\Leftrightarrow A(P, Q) = 0$

ここまでの設定のもと, 離散曲面の曲率を定義しよう. 以後,  $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を離散曲面とし,  $\nu$  を  $f$  のガウス写像とする. この  $f$  と  $\nu$  に対して,

$$\begin{aligned} A(f)_{ijkl} &:= A((f_i, f_j, f_k, f_\ell)), \quad A(\nu)_{ijkl} := A((\nu_i, \nu_j, \nu_k, \nu_\ell)), \\ A(f, \nu)_{ijkl} &:= A((f_i, f_j, f_k, f_\ell), (\nu_i, \nu_j, \nu_k, \nu_\ell)) \end{aligned}$$

と略記する.



**Definition 2.3** (and lemma).  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を離散曲面,  $\nu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  を  $f$  のガウス写像とする.  $f$  の距離  $t$  の平行曲面  $f^t := f + t\nu$  に対し,

$$A(f^t)_{ijkl} = (1 - 2tH_{ijkl} + t^2K_{ijkl})A(f)_{ijkl}$$

を満たす実数  $K_{ijkl}$ ,  $H_{ijkl}$ , つまり,

$$K_{ijkl} = \frac{A(\nu)_{ijkl}}{A(f)_{ijkl}}, \quad H_{ijkl} = -\frac{A(f, \nu)_{ijkl}}{A(f)_{ijkl}}$$

のことをそれぞれ,  $f$  のガウス曲率, 平均曲率という.

ガウス曲率, 平均曲率を定義すると, 主曲率との関係に注目するのが自然であるが, 離散曲面の曲率は離散曲面の各面において定義されているのに対して主曲率は離散曲面の各辺において定義されているため関係式は自明なものにはならない. 実際, 次が成り立つ.

**Proposition 2.3.**  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を離散曲面,  $\nu$  を  $f$  のガウス写像とし,  $f$  の主曲率  $\kappa_{ij}$ ,  $\kappa_{il}$ ,  $\kappa_{lk}$ ,  $\kappa_{jk}$  を以下の等式

$$d_{ij}\nu = -\kappa_{ij} \cdot d_{ij}f, \quad d_{il}\nu = -\kappa_{il} \cdot d_{il}f, \quad d_{lk}\nu = -\kappa_{lk} \cdot d_{lk}f, \quad d_{jk}\nu = -\kappa_{jk} \cdot d_{jk}f$$

を満たすものとする. このとき,

$$H_{ijkl} = \frac{\kappa_{ij}\kappa_{lk} - \kappa_{il}\kappa_{jk}}{\kappa_{ij} - \kappa_{il} - \kappa_{jk} + \kappa_{lk}}, \quad K_{ijkl} = \frac{\kappa_{ij}\kappa_{jk}\kappa_{lk}\kappa_{il}}{\kappa_{ij} - \kappa_{il} - \kappa_{jk} + \kappa_{lk}} \left( -\frac{1}{\kappa_{ij}} + \frac{1}{\kappa_{jk}} + \frac{1}{\kappa_{il}} - \frac{1}{\kappa_{lk}} \right) \quad (3)$$

が成り立つ.

この証明は, [4] に記載されているが, それよりもより直接的かつ簡明な証明が [23] において与えられたので, そちらを参照いただきたい.

一見するとこれらは良い関係式には見えないが, 次のように考えればよい.  $\kappa_{ij}$ ,  $\kappa_{lk}$  は  $m$  変数方向の差分から定まる主曲率となので, 形式的に連続極限を取ることで  $\kappa_{ij}$ ,  $\kappa_{lk} \rightarrow \kappa_1$  に収束すると考える. 同様に  $\kappa_{il}$ ,  $\kappa_{jk} \rightarrow \kappa_2$  に収束すると考えると,  $\kappa_1 \neq \kappa_2$  の場合<sup>5</sup>, Equation (3) の  $H_{ijkl}$ ,  $K_{ijkl}$  は  $H_{ijkl} \rightarrow \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ ,  $K_{ijkl} \rightarrow \kappa_1\kappa_2$  に収束する. この意味で, Equation (3) は自然なものである.

平均曲率の定義から次が言える. これは, Definition 2.2 の前の Remark でも言及した通り, 離散極小曲面や離散 CMC 曲面に関してはガウス写像として本質的に良いものを唯一つ選ぶことができるということを意味している.

**Proposition 2.4.**  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を離散曲面,  $\nu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  を  $f$  のガウス写像,  $f^* : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $f$  の双対曲面とする. このとき, 相似変換や平行移動を除いて,

- $H_{ijkl} \equiv 0 \Leftrightarrow f^* = \nu$  と選ぶことができる.
- $H_{ijkl} \equiv \text{constant} \neq 0 \Leftrightarrow f^* = f + \frac{1}{H_{ijkl}}\nu$  と選ぶことができる.

<sup>5</sup>これはまさに, 臍点は除くということに対応しており, 曲率線座標によってパラメータ表示される離散曲面の“ある種の”連続極限を考えるという点では極めて自然な状況である.



### 3 $\mathbb{R}^3$ 内の離散双等温曲面

本章では離散曲面の特別なクラスである離散双等温曲面の理論を紹介する．まずは双等温曲面の復習しておく． $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $(u, v)$  によってパラメータ表示されたはめ込みとする．このとき、 $(u, v)$  が双等温座標であるとは、 $(u, v)$  が等温かつ曲率線座標であることをいう．特に双等温座標  $(u, v)$  を持つような曲面のことを双等温曲面という． $\mathbb{R}^3$  内の曲面は必ずしも双等温曲面とは限らないが、臍点を除いて、 $\mathbb{R}^3$  内の回転面、極小曲面、CMC 曲面等は双等温曲面であることが知られている．離散双等温曲面は、極小曲面や CMC 曲面の離散化を含む興味深い研究対象である<sup>6</sup>．さて、Proposition 2.2 の続きとして、次の性質が知られている．

**Proposition 3.1** ([2], [6], [8] 参照).  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \cong \text{Im}\mathbf{H}$  を、曲率線座標によってパラメータ表示された曲面とする．このとき、次の2つが成り立つ．

- $F$  を双等温曲面とし、 $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を Möbius 変換とすると、 $M \circ F$  もまた双等温曲面．
- $F$  が双等温曲面である  $\Leftrightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} cr(F, F_1, F_{12}, F_2) = -\frac{a(u)}{b(v)} < 0$  をみたす．ここで、 $a(u)$ ,  $b(v)$  はそれぞれ、 $u$ ,  $v$  のみに依存する正定値スカラー関数である．

Proposition 3.1 の2つ目の主張は、双等温曲面を複比を用いて特徴付けに他ならない．双等温曲面の Möbius 不変性と、複比による特徴付け、および複比の Möbius 不変性を鑑みると、以下のように離散双等温曲面を定義するのは自然である．

**Definition 3.1.**  $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  が離散双等温曲面であるとは、 $cr(f_i, f_j, f_k, f_\ell) = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{i\ell}} < 0$  を満たすことである．ここで、 $\alpha_{ij}, \alpha_{i\ell}$  はそれぞれ、水平方向、鉛直方向の辺のみに依存したスカラー関数である．

特に、離散双等温曲面  $f$  の平均曲率  $H_{ijkl}$  が恒等的に 0 となるとき、 $f$  を離散 (双等温) 極小曲面という．このとき、Proposition 2.4 から、 $\nu = f^*$  と選ぶことができる．これは、次章で紹介する、離散極小曲面に対する Weierstrass の表現公式を証明する際に、この性質は本質的な役割を果たす．ところで、離散双等温曲面  $f$  の双対曲面  $f^*$  は次のようにして得られる．

**Proposition 3.2.**  $f$  を離散双等温曲面とする．このとき、 $f$  の双対曲面  $f^*$  は、

$$f_j^* - f_i^* = \frac{\alpha_{ij}(f_j - f_i)}{\|f_j - f_i\|^2}, \quad f_\ell^* - f_i^* = \frac{\alpha_{i\ell}(f_\ell - f_i)}{\|f_\ell - f_i\|^2}$$

によって得られる．また、 $f^*$  も離散双等温曲面となる． $f^*$  のことを、 $f$  の Christoffel 変換ともいう．

Proposition 3.2 の方が、離散双等温曲面  $f$  の双対曲面としては自然なものと思われる方も多いだろう．実際、Christoffel 変換が初めて導出された [2] においても、Proposition 3.2 が定義として用いられていた．その後、より一般の離散曲面を取り扱うために、Definition 2.2 の定義が新たに採用された経緯がある．

<sup>6</sup>なめらかな場合、座標の取り換えは行えるが、離散的な場合についてはそう上手くはいかない．特定の座標を持つ曲面の離散化の中に、双等温極小曲面と双等温 CMC 曲面の離散化が含まれている、ということである．離散曲面の座標の取り換えは、非自明かつ難しい問題で、最近の [13] の研究においてようやく着手され始めた．

## 4 $\mathbb{R}^3$ 内の離散極小曲面

本章では  $\mathbb{R}^3$  内の離散（双等温）極小曲面の構成法に関して簡単に紹介する．Bobenko-Pinkall [2] によって，離散極小曲面に対する Weierstrass の表現公式が導出された．まずは一つだけ用語の準備を行う．

**Definition 4.1.** 離散双等温曲面  $g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  のことを**離散正則関数**という．

正則関数の離散化をなぜこのように定義するのかについて簡単に述べる<sup>7</sup>．なめらかな場合，正則関数  $G(z)$  ( $z = u + \sqrt{-1}v$ ) は，コーシー・リーマンの方程式

$$G_u + \sqrt{-1}G_v = 0$$

をみたとす．この式を単純に差分に置き換えて，例えば  $g_j - g_i + \sqrt{-1}(g_\ell - g_i) = 0$  をみたとすような  $g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  を離散正則関数とすると，これでは自明なものしか現れないためあまり面白くない．そこで，コーシー・リーマンの方程式を少しだけ変形すると， $\frac{G_u \cdot G_u}{G_v \cdot G_v} = -1$  となる．

分子の  $G_u \cdot G_u$  を， $(g_j - g_i)(g_k - g_\ell)$  と置き換え，分母の  $G_v \cdot G_v$  を， $(g_\ell - g_i)(g_k - g_j)$  と置き換えると，これは離散双等温曲面の定義の特別な場合であることが分かる<sup>8</sup>．なめらかな場合，正則関数は Möbius 不変性を持っていることから，このように定義するのが自然である．

この離散正則関数を用いることにより，離散極小曲面に対する Weierstrass の表現公式を導出することができる．

**Theorem 1.** 任意の離散極小曲面  $f$  は，

$$d_{i*}f = \frac{\alpha_{i*}}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1 - g_i g_*}{d_{i*}g_i}, \frac{\sqrt{-1}(1 + g_i g_*)}{d_{i*}g_i}, \frac{g_i + g_*}{d_{i*}g_i} \right)^t$$

によって得られる．ここで， $g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  は， $cr(g_i, g_j, g_k, g_\ell) = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{i\ell}} < 0$  をみたとす離散正則関数， $*$  =  $j, \ell$  である．この差分方程式のことを離散極小曲面に対する Weierstrass の表現公式という．

Theorem 1 が導出された当初は，離散極小曲面の平均曲率が恒等的に 0 になることが示されたわけではなかった．[2] では，単に  $\mathbb{S}^2$  上に値をとる離散双等温曲面の Christoffel 変換のことを離散極小曲面と呼んでおり，曲率については全く言及されなかった．実際に平均曲率を計算したのは Bobenko-Pottmann-Wallner [4] であり，離散曲面の曲率の理論がいかに最近になって発見されたかがよく分かる．

さて，離散極小曲面に話を戻そう．微分幾何の研究に慣れていると，上記で構成される離散極小曲面の随伴族はどうなるかに興味が向かうであろう．つまり，上記の離散極小曲面に対する Weierstrass の表現公式の実部の中に  $e^{\sqrt{-1}\theta}$  をかけて得られる

$$d_{i*}f^\theta = \frac{\alpha_{i*}}{2} \operatorname{Re} \left( e^{\sqrt{-1}\theta} \left( \frac{1 - g_i g_*}{d_{i*}g_i}, \frac{\sqrt{-1}(1 + g_i g_*)}{d_{i*}g_i}, \frac{g_i + g_*}{d_{i*}g_i} \right)^t \right) \quad (\theta \in [0, 2\pi))$$

<sup>7</sup>著者が学生のときに，Tim Hoffmann 氏（ミュンヘン工科大学）から説明を受けたときに，（著者にとって）最もしっくりとくる説明だった．こういったことを記録に残し，共有することにも意味があると思う．

<sup>8</sup>このような離散正則関数は，離散共形写像 (discrete conformal map) と呼ばれており，circle pattern との関連しながら研究が進められている．詳細は，[1], [3] 等を参照

をみたす離散曲面  $f^\theta$  の有無である（ここで、 $f^0 = f$  となることに注意）．結論を述べると、上記を満たすような離散曲面  $f^\theta$  は存在する．実際、 $f^\theta$  の可積分条件

$$d_{ij}f^\theta + d_{jk}f^\theta = d_{il}f^\theta + d_{lk}f^\theta$$

を確かめればよい．問題は、上記で構成された  $f^\theta$  がまた離散極小曲面になるかどうかである．一般に、 $f^\theta$  は離散双等温曲面とは限らない<sup>9</sup>．それどころか、4点  $f_i^\theta, f_j^\theta, f_k^\theta, f_\ell^\theta$  は同一平面上にさえないので、先程までの定義は適用できない．この問題については、[13]にあるので詳細は述べないが、結論としては、曲率の定義に少し改良を加えることにより、 $f^\theta$  の平均曲率が恒等的に 0 となることを確かめることができる．

## 5 $\mathbb{R}^{2,1}$ 内の離散極大曲面

さて、ようやく本題の  $\mathbb{R}^{2,1}$  内の離散曲面に話を移そう．もともとは [14] においてこのような問題が考えられたが、本格的にこの問題に取り組み始めたのは [26] である．本稿では、 $\mathbb{R}^{2,1} := (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  を、ローレンツ計量

$$\langle (x_1, x_2, x_0)^t, (y_1, y_2, y_0)^t \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_0y_0 \quad ((x_1, x_2, x_0)^t, (y_1, y_2, y_0)^t \in \mathbb{R}^{2,1})$$

を持つ 3 次元ミンコフスキー空間とする．細かい定義や性質等は [26] を参照していただくとして、まずは 1 つ結果を述べる．

**Theorem 2.** 任意の離散双等温極大曲面  $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$  は、局所的に

$$d_{i*}f = \frac{\alpha_{i*}}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1 + g_i g_*}{d_{i*} g_i}, \frac{\sqrt{-1}(1 - g_i g_*)}{d_{i*} g_i}, -\frac{g_i + g_*}{d_{i*} g_i} \right)^t \quad (4)$$

によって得られる．ここで、 $g: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  は  $cr(g_i, g_j, g_k, g_\ell) = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{i\ell}} < 0$  をみたす離散正則関数、 $* = j, \ell$  である．

**Remark.** 上記の Weierstrass 型の表現公式を用いて構成される  $f$  の平均曲率は、恒等的に 0.

この式だけ見てみると、 $\mathbb{R}^3$  内の離散双等温極小曲面に対する Weierstrass の表現公式とほとんど何も変わらないように思えるが、実際にグラフィックスを作成してみると、明らかに異なる点も現れる．離散双等温極大曲面の例は、Figure 5 をご覧いただきたい．Figure 5 で紹介した離散極大曲面は、“特異点” のようなものを持っていることが分かる．なめらかな場合、 $\mathbb{R}^{2,1}$  内の極大曲面は一般に特異点を持つことが知られており（例えば [7], [15] 参照）、離散の場合についても特異点が現れるのはある意味自然なことである．

一番の問題は、離散的な場合の特異点とはいったい何なのか、またどのように解析するか、という点である．離散曲面の研究においては、一般に微分をすることは出来ないことに加えて、そもそも離散曲面は、至るところ特異点があるように思える．このような問題に取り組んだのは、Hoffmann-Rossman-佐々木-吉田 [12] が初めてである．一般の離散曲面に現れる特異点の解析は非常に難しい<sup>10</sup> ので、まずは離散双等温極大曲面に現れる特異点の解析から始めよう．離散双等温極大曲面の特異点を次のように定義する．

<sup>9</sup> $\theta = 0, \pi$  の除く  $\theta$  に対して、 $f^\theta$  は離散双等温曲面でない．

<sup>10</sup> というよりは、何の手掛かりもない、という方が正しいかと思う．

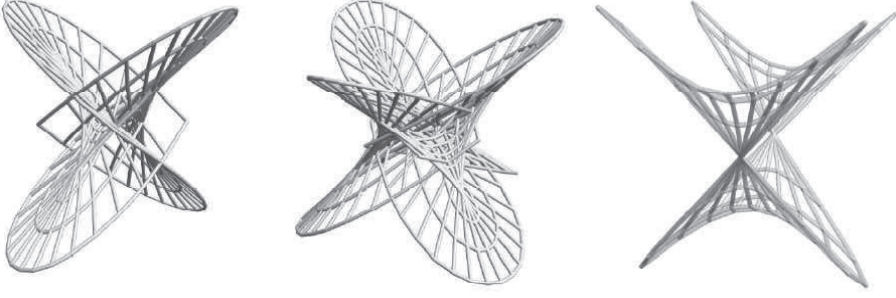


Figure 5:  $\mathbb{R}^{2,1}$  内の離散双等温極大曲面の3つの例. 左から順に, 離散極大 Enneper 曲面, 離散極大 higher order Enneper 曲面, 離散極大回転面の一つ.

**Definition 5.1.**  $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$  を, Equation (4) によって構成される離散曲面とする<sup>11</sup>. 4点  $f_i, f_j, f_k, f_\ell$  を通る平面が空間的でないとき, 面  $(f_i, f_j, f_k, f_\ell)$  を**特異面**であるという.

**Remark.** [12] の意味での特異点と, 本稿で紹介した特異点 (i.e. 特異面) とは異なるものである. 実際, [12] で紹介された特異点は頂点ごとに定義されたものであるが, 離散双等温極大曲面の特異面は面ごとに定義されている. この2つのアプローチのインタラクションについては, [23] を参照いただきたい.

これは次のように解釈することが出来る:  $f_j - f_i, f_\ell - f_i$  はそれぞれ, なめらかな極大曲面の2つの接ベクトルとみなすことができる. したがって,  $\text{span}\{f_j - f_i, f_\ell - f_i\}$ , つまり4点  $f_i, f_j, f_k, f_\ell$  と通る平面は, 離散曲面の接平面とみなすことができる. 今, 極大曲面 ( $\mathbb{R}^{2,1}$  内の空間的曲面で, 平均曲率一定0となる曲面) の離散化を考えているので, “正則”な部分では接平面は空間的, そうでない部分は特異点である. この考え方は極めてシンプルではあるが, 3次元ローレンツ空間型内の空間的曲面の離散化を考察する際には実に本質的である. ここでは,  $\mathbb{R}^{2,1}$  内の離散双等温極大曲面が特異面を持つための判定条件を紹介する.

**Theorem 3.**  $f$  を Equation (4) によって構成される離散曲面とする. このとき,  $f$  が特異面  $(f_i, f_j, f_k, f_\ell)$  を持つための必要十分条件は, 対応する離散正則関数  $(g_i, g_j, g_k, g_\ell)$  の外接円  $C_{ijkl}$  が複素平面内の単位円  $\mathbb{S}^1$  と共通部分を持つことである (Figure 6 参照).

Theorem 3 は自然である. なめらかな場合, 共形極大曲面に対する Weierstrass 型の表現公式は, 有理型関数  $G$  と, 正則1次形式  $\omega = \hat{\omega}dz$  (ただし,  $G^2\hat{\omega}$  は正則とする) を用いて,

$$F = \text{Re} \left( \int (1 + G^2, \sqrt{-1}(1 - G^2), -2G)^t \omega \right)^{12}$$

と表される ([15] 参照) が,  $|G| = 1$  ( $G \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ ) のとき,  $F$  は特異点を持つことが知られている. Theorem 3 は, 離散双等温極大曲面を構成する際に用いられる離散正則関数  $g$  が, 必ずしも  $\mathbb{S}^1$  に値を取らなくとも,  $\mathbb{S}^1$  の周りに値を取るときに特異面が現れることを意味する.

<sup>11</sup>Theorem 3 で述べた通り,  $f$  は局所的に離散双等温極大曲面である

<sup>12</sup>特に,  $F$  が双等温極大曲面の場合は,  $\hat{\omega} = 1/\partial_z G$  と選ぶことができる.

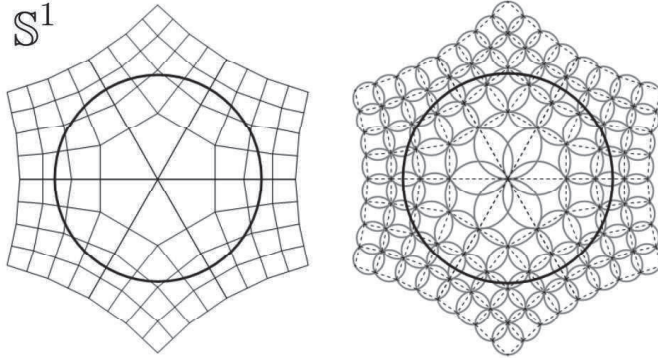


Figure 6: 離散正則関数の一例（左図）と、各四角形の外接円（右図）. この離散正則関数によって構成される離散双等温極大曲面に現れる特異点を解析するには、離散正則関数の像そのものではなく外接円に注目する.

$\mathbb{R}^3$  内の離散極小曲面と同様に、離散双等温極大曲面の随伴族も考えることができる<sup>13</sup>. Equation (4) の離散双等温極大曲面に対する Weierstrass の表現公式の実部を取る前に  $e^{\sqrt{-1}\theta}$  をかけて得られる

$$d_{i*}f^\theta = \frac{\alpha_{i*}}{2} \operatorname{Re} \left( e^{\sqrt{-1}\theta} \left( \frac{1 + g_i g_*}{d_{i*} g_i}, \frac{\sqrt{-1}(1 - g_i g_*)}{d_{i*} g_i}, -\frac{g_i + g_*}{d_{i*} g_i} \right)^t \right) \quad (\theta \in [0, 2\pi)) \quad (5)$$

をみたと離散曲面  $f^\theta$  は存在し、その平均曲率は恒等的に 0 となる. ここまでは、離散極小曲面の場合とほとんど同じである.

次に考えたいのは、 $f^\theta$  に現れる“特異点”の解析である. 離散極小曲面の場合と同様に、一般には  $f^\theta$  は離散双等温曲面ではないので、先程と同様に考えることはできない. 一方、著者と Lam が [18] にて新たに導出した、“頂点法方向”<sup>14</sup> (vertex normal direction) なる概念を新たに導入することによって、特異面を定義し、解析することができる. 最終的に、次の結論を得ることができる.

**Theorem 4.**  $f^\theta$  を Equation (5) によって構成される離散曲面とする. このとき、 $f$  が特異面  $(f_i, f_j, f_k, f_\ell)$  を持つための必要十分条件は、対応する離散正則関数  $(g_i, g_j, g_k, g_\ell)$  の外接円  $\mathcal{C}_{ijkl}$  が複素平面内の単位円  $S^1$  と共通部分を持つことである.

前述の通り、なめらかな場合、極大曲面が特異点を持つための条件は、 $G$  の条件のみで決定され、 $e^{\sqrt{-1}\theta}$  は特異点が現れるための条件に何ら影響を及ぼさない<sup>15</sup>. したがって Theorem 4 も極めて自然なものである. 離散双等温極大曲面とその随伴族の図は、Figure 7 を参照.

<sup>13</sup>ここからの内容は、[18]の準備として既に計算は終わっているが、論文にはまとめていない. 本稿には詳細は書かないが、将来、曲面の離散微分幾何の研究に携わる学生のための演習問題としてはよい問題かと思う.

<sup>14</sup>今回の場合は、“面法方向”と表現する方が正しい

<sup>15</sup>ただし、特異点の型には影響を及ぼす. 詳細は例えば [7] を参照.

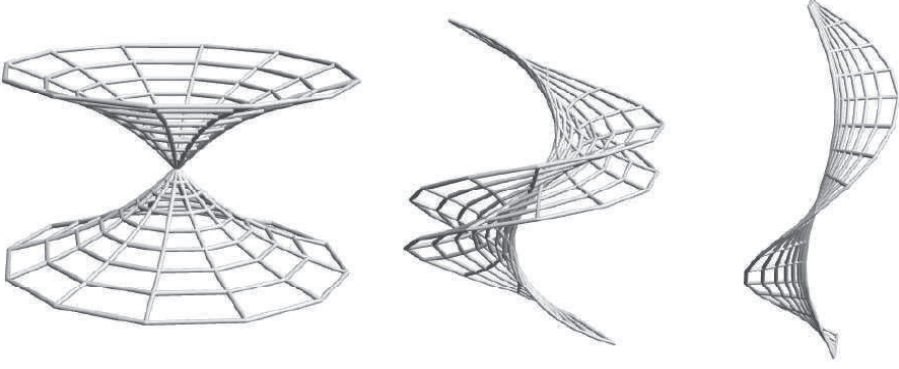


Figure 7: 離散双等温極大回転面と、その随伴族の図（左から、 $\theta = 0, \pi/6, \pi/2$ ）。いずれの曲面にも特異面が現れるが、これらに対応する離散正則関数の情報のみで解析できる。

$\mathbb{R}^{2,1}$  内の離散空間的 CMC 曲面についても構成法があるが、説明すべきことが多いので本稿では説明しない。主結果だけ紹介する。詳細は、現在執筆中の [27] を参照いただきたい<sup>16</sup>。

**Theorem 5.**  $\mathbb{R}^{2,1}$  内の任意の離散双等温 CMC  $H$  曲面  $f$  は、以下の手順で構成できる。

1.  $g: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  を、 $cr(z_i, z_j, z_k, z_\ell) = \lambda_0^2/\lambda_1^2$  をみたす離散正則関数、

$$L_{ij}^- = \begin{pmatrix} 1 & \frac{g_j - g_i}{\lambda} \\ \frac{\lambda_0^2}{\lambda(g_j - g_i)} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{i\ell}^- = \begin{pmatrix} 1 & \frac{g_\ell - g_i}{\lambda} \\ \frac{\lambda_1^2}{\lambda(g_\ell - g_i)} & 1 \end{pmatrix}$$

とし、 $\phi_j = \phi_i \cdot L_{ij}^-$ ,  $\phi_\ell = \phi_i \cdot M_{i\ell}^-$  を解く..

2.  $\phi_i = \Phi_i B_i$  ( $\Phi_i \in \text{PASU}_{1,1} \cup \sqrt{-1}\sigma_1 \cdot \text{PASU}_{1,1}$ ) と 2つの行列の積に分解する。

3. 上記の  $\Phi_i$  を、 $f_i = \frac{-\sqrt{-1}}{2H} \left[ \Phi_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Phi_i^{-1} + 2\lambda(\partial_\lambda \Phi_i) \Phi_i^{-1} \right] \Big|_{\lambda=1}$  に代入する。

Theorem 5 は、[11], [19] のアナロジーのようにも見えるが、2つ目の行列の分解において著しく異なる点が見れる。この影響で、 $\mathbb{R}^{2,1}$  内の離散双等温 CMC 曲面もまた特異点を持つ場合がある。[13] では、 $\mathbb{R}^3$  内の離散 CMC 曲面の 1 パラメータ族も含めて平均曲率が計算されているが、 $\mathbb{R}^{2,1}$  内の離散双等温 CMC 曲面の 1 パラメータ族の曲率はまだ求められていない<sup>17</sup>。これは今後の課題である。

<sup>16</sup>2019 年 1 月末までには執筆を終えて、プレプリントサーバーにアップロードする予定である

<sup>17</sup>実は 3 次元リーマン空間型の場合でさえよく分かっていない。



## 謝辞

「RIMS 共同研究（公開型）部分多様体の幾何学の深化と展開」にて講演の機会を与えてくださった、世話人の川久保哲先生にこの場をお借りして御礼申し上げます。本研究の一部は、JSPS 科研費 JP18H04489（研究課題名：多角的なアプローチを用いた次数 3 の空間グラフの離散平均曲率一定曲面の研究）および京都大学数理解析研究所共同利用・共同研究拠点事業の助成を受けたものです。

## References

- [1] A.I. Bobenko, *Discrete conformal maps and surfaces*, Symmetry and integrability of difference equations, Cambridge Univ. Press, London Math. Soc. Lect. Note Series **255** (1999), 97-108.
- [2] A.I. Bobenko and U. Pinkall, *Discrete isothermic surfaces*, J. Reine Angew. Math. **475** (1996), 187-208.
- [3] A.I. Bobenko and U. Pinkall, *Discretization of surfaces and integrable systems*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl. **16**. Oxford Univ. Press (1998). 3-58.
- [4] A.I. Bobenko, H. Pottmann, and J. Wallner, *A curvature theory for discrete surfaces based on mesh parallelity*, Math. Annalen **348** (2010), 1-24.
- [5] A.I. Bobenko and Y. Suris, *Discrete differential geometry, integrable structure*, Graduate Textbooks in Mathematics 98, A.M.S., 2008.
- [6] J. Cho, K. Naokawa, Y. Ogata, M. Pember, W. Rossman and M. Yasumoto, *Discretization of isothermic surfaces in Lie sphere geometry*, preprint.
- [7] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827-848.
- [8] U. Hertrich-Jeromin, *Introduction to Mbius differential geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series **300**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [9] U. Hertrich-Jeromin, T. Hoffmann and U. Pinkall, *A discrete version of the Darboux transform for isothermic surfaces*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., 16. Oxford Univ. Press (1998). 59-81.
- [10] T. Hoffmann, *Discrete cmc surfaces and discrete holomorphic maps*, Discrete integrable geometry and physics (Vienna, 1996), 97-112, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **16**, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1999.
- [11] T. Hoffmann, *Discrete differential geometry of curves and surfaces*, MI Lecture Note **18** (2009).



- [12] T. Hoffmann, W. Rossman, T. Sasaki and M. Yoshida, *Discrete flat surfaces and linear Weingarten surfaces in hyperbolic 3-space*, Trans. A.M.S. **364** (2012), 5605-5644.
- [13] T. Hoffmann, A.O. Sageman-Furnas and M. Wardetzky, *A discrete parametrized surface theory in  $\mathbb{R}^3$* , Int. Math. Res. Not. IMRN 2017, no. 14, 4217-4258.
- [14] Y. Kinoshita and W. Rossman, *Isothermicity of discrete surfaces in the Euclidean and Minkowski 3-space*, OCAMI publications 3 (2010), 1-13.
- [15] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space  $L^3$* , Tokyo J. Math. **6** (1983), no. 2, 297-309.
- [16] M. Kotani, H. Naito and T. Omori, *A discrete surface theory*, Comput. Aided Geom. Design **58** (2017), 24-54.
- [17] W.Y. Lam, *Discrete minimal surfaces: critical points of the area functional from integrable systems*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2018, no. 6, 1808-1845.
- [18] W.Y. Lam and M. Yasumoto, *Trivalent maximal surfaces in Minkowski space*, Lorentzian geometry and related topics, 169-184, Springer Proc. Math. Stat. **211** (2018), Springer, Cham, 2017.
- [19] Y. Ogata and M. Yasumoto, *Construction of discrete constant mean curvature surfaces in Riemannian spaceforms and applications*, Differential Geom. Appl. **54** (2017), part A, 264-281.
- [20] U. Pinkall and K. Polthier, *Computing discrete minimal surfaces and their conjugates*, Exp. Math. **2** (1993), 15-36.
- [21] K. Polthier and W. Rossman, *Discrete constant mean curvature surfaces and their index*, J. Reine. U. Angew. Math. **549** (2002), 47-77.
- [22] W. Rossman, *Discrete constant mean curvature surfaces via conserved quantities*, MI Lecture Note **25** (2010).
- [23] W. Rossman and M. Yasumoto, *Discrete linear Weingarten surfaces and their singularities in Riemannian and Lorentzian spaceforms*, Adv. Stud. Pure Math. **Vol.78**, 383-410.
- [24] W. Rossman, 安本真士, 離散曲面の微分幾何, in preparation.
- [25] 梅原雅顕, 山田光太郎, 曲線と曲面 (改訂版) -微分幾何的アプローチ-, 裳華房 (2015).
- [26] M. Yasumoto, *Discrete maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Differential Geom. Appl. **43** (2015), 130154.
- [27] M. Yasumoto, *The DPW method for discrete constant mean curvature surfaces in Minkowski space*, in preparation.